

## Kontras Ortogonal

### I. Orthogonal Contrast

Misalkan kita ingin mengukur respon tanam-tanaman atas nitrogen tambahan. Secara umum misalkan kita tahu bahwa penambahan nitrogen sebanyak 100 kg/ha sudah memadai. Pertanyaannya adalah: Kapan sebaiknya nitrogen tersebut diberikan? Untuk menjawab pertanyaan ini, kita pilih 4 perlakuan:

1. Check; tidak ada nitrogen
2. Fall; 100 kg/ha Oktober
3. Spring; 100 kg/ha Maret
4. Split; 50 kg pada Oktober dan 50 kg pada Maret

Misalkan ada 3 jenis tanah yang digunakan dalam eksperimen ini yang dipandang sebagai blok. Kita ambil 4 plot untuk setiap jenis tanah dan perlakuan diberikan secara acak ke setiap plot di dalam blok (jenis tanah). Diperoleh data sbb (berat dalam kg):

Perlakuan	Jenis I	Jenis II	Jenis III	Total	Rata-rata
Check (1)	9.9	12.3	11.4	33.6	11.20
Fall (2)	11.4	12.9	12.7	37.0	12.33
Spring (3)	12.1	13.4	12.9	38.4	12.80
Split (4)	10.1	12.2	11.9	34.2	11.40
Jumlah	43.5	50.8	48.9	143.2	
Rata-rata	10.88	12.70	12.22		11.93

Hasil analisis awal disajikan dalam tabel ANOVA berikut:

Sumber variasi (sv)	Derajat bebas (df)	Jumlah Kuadrat (SS)	Kuadrat Tengah (MS)	F
Jenis tanah	2	7.1717	3.5858	40.21 **)
Perlakuan	3	5.2000	1.7333	19.44 **)
Kekeliruan	6	0.5350	0.0892	
Total	11	12.9067		

\*\*\*) significant pada taraf 1%. Dengan SAS p-value 0.0017

Karena  $F_{.01(3,6)}=9.78$  maka  $H_0$  ditolak dan dapat disimpulkan bahwa terdapat perbedaan yang sangat berarti (highly signifikan) antara perlakuan nitrogen yang diberikan.

Namun demikian, beberapa pertanyaan berikut juga dapat dijawab dari penelitian ini:

1. Apakah pemberian nitrogen pada Fall dan Spring memberikan respon yang berbeda? (fall vs. spring)
2. Apakah pemberian nitrogen diberikan sekaligus berbeda dengan diberikan secara terpisah pada Oktober (fall) dan Maret (spring)? (single vs. split)
3. Apakah terdapat perbedaan respon antara pemberian nitrogen dengan tidak diberikan sama sekali? (N vs. no N).

Ketiga pertanyaan tersebut dapat dianalisis sekaligus dengan menggunakan orthogonal contrast yang saling independen.

Jika kita mempunyai  $p$  perlakuan, maka dapat dibentuk  $p-1$  contrast yang saling independent. Untuk mendapatkan contrast yang independent maka contrast tersebut haruslah orthogonal. Perhatikan definisi kontras rata-rata berikut:

Dua contrast  $L_1 = k_{11}\mu_1 + k_{12}\mu_2 + \dots + k_{1p}\mu_p$  dan  $L_2 = k_{21}\mu_1 + k_{22}\mu_2 + \dots + k_{2p}\mu_p$  adalah

ortogonal jika dan hanya jika  $\sum_{j=1}^p k_{1j} k_{2j} = 0$

Catatan:

1. Jika ada  $p$  treatment, maka akan selalu mungkin menyusun  $p-1$  ortogonal contrast meskipun tidak selalu mempunyai makna dalam konteks tujuan eksperimen.
2. Jika ada  $p$  treatment, maka dapat disusun lebih dari satu set ortogonal contrast, tetapi setiap set hanya dapat memuat tidak lebih dari  $p-1$  mutually orthogonal contrasts.

Contoh:

1. Misalkan ingin dilihat efek 4 waktu perkuliahan statistika: pagi, siang, sore dan malam. Kecuali waktu, faktor lain yang diduga mempengaruhi hasil belajar dibuat sama. Rata-rata<sup>2</sup> hasil belajar dinotasikan dengan  $\mu_1, \mu_2, \mu_3,$  dan  $\mu_4$

Karena kita mempunyai  $p=4$ , maka dapat disusun 3 contrast, misalnya dengan membandingkan:

- a. Efek waktu pagi dan malam
- b. Efek waktu siang dan sore
- c. Efek waktu pagi dan malam dengan siang dan sore

Othogonal contrast nya dapat disusun sbb:

Contrast	Pagi	Siang	sore	malam
Pagi vs. malam	1	0	0	-1
Siang vs. sore	0	1	-1	0
Pagi,malam vs. siang,sore	1	-1	-1	1

Ketiga contrast ini adalah orthogonal karena  $\sum_{j=1}^p k_{1j} k_{2j} = 0$ . Periksa!

2. Perhatikan satu set perlakuan yang dirancang untuk menguji efek aditif gasolin:

(1) tidak pakai aditif, (T) aditif T, (P) aditif P, (TP) campuran aditif T dan P.

Karena  $p=4$  maka kita dapat menyusun 3 contrast yang orthogonal, misalnya seperti berikut ini:

Contrast	(1)	T	P	TP
T vs. P	0	1	-1	0
Alone vs. together	0	-1	-1	2
None vs. some	-3	1	1	1

Contrast di atas bukan satu-satunya contrast yang dapat kita susun. Kita juga dapat menyusun contrast berikut. Bandingkan dengan contrast di atas

Contrast	(1)	T	P	TP
Ada T vs. tanpa T	-1	1	-1	1
Ada P vs. tanpa P	-1	-1	1	1
Beda T dan tanpa T vs. ketika ada tidaknya P	1	-1	-1	1

3. Perhatikan suatu rancangan percobaan yang dilakukan untuk membandingkan efek 4 jenis sabun: (S) Soap, (L) Liquid detergent, (G) Granular, dan (F) Detergent flakes. Orthogonal contrast yang dapat disusun adalah sbb:

Contrast	S	L	G	F
Soap vs. detergent	-3	1	1	1
Liquid vs. solid	0	-2	1	1
Granulate vs. flake	0	0	-1	1

## II. Contrasts of Totals

Dalam konteks ANOVA, kita dapat mengkonstruksi contrast dengan mempartisi contrast SST menjadi beberapa komponen yang masing-masingnya merupakan SS untuk setiap contrast. Untuk keperluan ini akan lebih mudah bekerja dengan contrast total dibandingkan dengan contrast rata-rata. Asumsikan beberapa hal berikut:

1. Treatment mempunyai replikasi yang sama
2.  $p$  adalah jumlah treatment
3.  $r$  adalah jumlah replikasi per treatment
4.  $T_j$  adalah jumlah hasil (yield) pada treatment ke  $j$

Langkah-langkah melakukan pengujian dengan menyusun contrast total:

1.  $L = k_1T_1 + k_2T_2 + \dots + k_pT_p$  adalah contrast total jika dan hanya jika  $\sum_{j=1}^p k_j = 0$

(untuk  $r_1 = r_2 = \dots = r_p = r$ ). Catat bahwa jika  $L_1$  dan  $L_2$  adalah contrast total dan

jika  $\sum_j k_{1j} k_{2j} = 0$  maka  $L_1$  dan  $L_2$  adalah orthogonal.

2. Varians sampel  $V(L)$  untuk contrast total adalah

$$V(L) = (r \sum_j k_j^2) s^2 = (r \sum_j k_j^2) \text{MSE}$$

3. Jika  $L_1$  adalah contrast total maka  $S_1^2 = L_1^2 / D_1 = (\sum_j^p k_{1j} T_j)^2 / r \sum_j k_{ij}^2$  adalah komponen SST untuk setiap contrast total dengan masing2 satu df.
4. Jika  $L_1, L_2, \dots$  dan  $L_{p-1}$  adalah mutually orthogonal contrast maka  $S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_{p-1}^2 = SST$ .

Example:

Perhatikan contoh waktu pemberian Nitrogen. Untuk menjawab tiga pertanyaan tersebut kita ajukan hipotesis dengan menyusun sebuah fungsi linear untuk contrast:

$$L = k_1 T_1 + k_2 T_2 + k_3 T_3 + k_4 T_4, \text{ lanjutkan dengan pengujian hipotesis } H_0: L=0.$$

Selanjutnya hitung nilai kontras L dan  $S^2$  yang disusun dalam tabel berikut.

Contrast	Check	Fall	Spring	Split	L	D	$S^2$ = $L^2/D$
Total	33.6	37.0	38.4	34.2			
Fall vs. spring	0	-1	+1	0	1.4	6	.3267
Single vs. split	0	+1	+1	-2	7.0	18	2.7222
N vs. no N	-3	+1	+1	+1	8.8	36	2.1511

Fall vs. Spring

$$L = -37.0 + 38.4 = 1.4$$

$$D = r \sum_j k_j^2 = 3(0+1+1+0) = 6, \text{ r adalah jumlah blok dalam RAK.}$$

Selanjutnya dapat disusun ke dalam table ANOVA berikut.

Sumber variasi (sv)	Derajat bebas (df)	Jumlah Kuadrat (SS)	Kuadrat Tengah (MS)	F
Jenis tanah	2	7.1717	3.5858	40.21 (**)
Perlakuan	3	5.2000	1.7333	19.44 (**)
Fall vs. spring	1	.3267	.3267	3.66
Single vs. split	1	2.7222	2.7222	30.51 (**)
N vs. no N	1	2.1511	2.1511	24.12 (**)
Kekeliruan	6	0.5350	0.0892	
Total	11	12.9067		

\*\*\*) significant pada taraf 1%.

p-value untuk: Fall vs. Spring (0.1041); Single vs Split (0.0015), N vs.No N (0.0027)

Berikut ini adalah program SAS untuk contoh data nitrogen di atas. Perhatikan cara penulisan contrast.

```

data nitrogen;
input soil time yield;
cards;
1 1 9.9
1 2 11.4
1 3 12.1
1 4 10.1
2 1 12.3
2 2 12.9
2 3 13.4
2 4 12.2
3 1 11.4
3 2 12.7
3 3 12.9
3 4 11.9
;
title 'Data Nitrogen, Petersen 98';
proc glm data=nitrogen;
class soil time;
model yield=soil time;
contrast 'fall vs spring' time 0 -1 1 0;
contrast 'single vs. split' time 0 1 1 -2;
contrast 'N vs no-N' time -3 1 1 1;
means time/lsd;
run;

```

Diperoleh ANOVA sebagai berikut:

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value	Pr > F
soil	2	7.17166667	3.58583333	40.21	0.0003
time	3	5.20000000	1.73333333	19.44	0.0017

  

Contrast	DF	Contrast SS	Mean Square	F Value	Pr > F
fall vs spring	1	1.30666667	1.30666667	14.65	0.0087
single vs. split	1	1.74222222	1.74222222	19.54	0.0045
N vs no-N	1	2.15111111	2.15111111	24.12	0.0027

Gunakan uji lanjut LSD untuk memeriksa perbandingan ganda (multiple comparison) untuk time.